



第1回：異なる断面積を通過する気体

「モデルベース開発のための複合物理領域モデリング」著者

トヨタ自動車株式会社

理事 大島 明

2013年3月21日

1. はじめに

ここでは、「複合物理領域モデリング」の第7章の7.1.2節で解説したノズルを通過する気体の流量計算について、より一般の場合について詳しく説明する。

7.1.2節では、図1に示すような断面の異なる流路を通過する気体の流量を、上流の圧力 p_u と密度 ρ_u 、および、下流の圧力 p_d から求める方法について述べた。上流の管の断面積を A_u とし、断面積 A_d から圧力 p_d の開いた空間に流出するものとする。ここでは、 $A_u > A_d$ と仮定する。このような流れのモデルはエンジンのスロットル弁、吸排気弁を通過する流量計算など様々なところで利用されている。

一般には、 $A_u \rightarrow \infty$ を想定して、7.1.2節の(7.26)の上流流速を $v_u \rightarrow 0$ とすることで、解析的に(7.44)や(7.45)を求める。(7.45)では質量保存則、エネルギー保存則、運動量保存則を用いているが、多くの文献では等エントロピー変化の式を用いている。ここでは、保存則と拘束に基づく HLMD による「複合物理領域モデリング」である HLMD の立場から質量保存則、エネルギー保存則、運動量保存則を用いて流量を求める。著者の経験によれば、運動量保存則を用いた方が実際のエンジンでの流量に合っているようである（実用流量係数を小さくでき、臨界圧が低压側となる。）。このとき、双方のモデルで注意しなければならないことは、「流出速度は音速を超えない。」という条件を加味することである。

ここでは、上流断面に $A_u \rightarrow \infty$ の仮定を設けず、伝熱を考慮する場合やより複雑な流路にも対応できるホモトピー法を用いた準定常状態の流量計算法を紹介する。

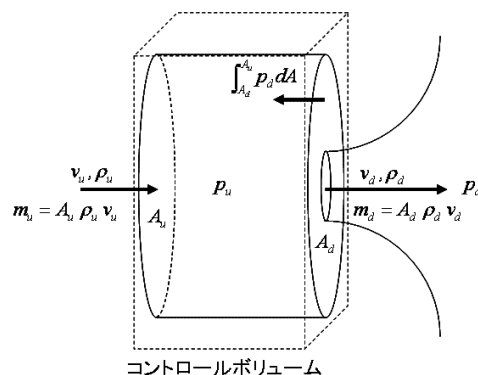


図1 異なる断面を通過する気体の流れ

2. HLMD と生成される式

上流の圧力を p_u 、密度を ρ_u 、速度を v_u とする。図1のコントロールボリュームに対する HLMD は図2の通りである。この例では、準定常状態を考えるので、コントロールボリュームを上流のどこまで取る

かは自由である。

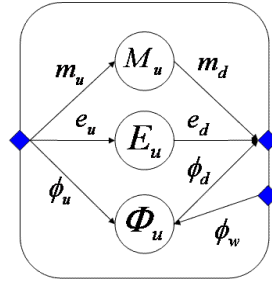


図 2 異なる断面積を通過する流れの HLMD

コントロールボリューム内の気体の質量を M_u 、エネルギーを E_u 、運動量を Φ_u とする。図 2 中の m_u はコントロールボリュームに流入する質量流量、 e_u はエネルギー流量、 ϕ_u は運動量流量である。また、 m_d は断面積 A_d から流出する質量流量、 e_d はエネルギー流量、 ϕ_d は運動量流量である。流出部での圧力を p_{cd} 、密度を ρ_d 、流速を v_d とすると、保存量流量は

$$m_u = A_u \rho_u v_u \quad (\text{A1})$$

$$e_u = m_u \left\{ \frac{f+2}{2} p_u \rho_u^{-1} + \frac{1}{2} v_u^2 \right\} \quad (\text{A2})$$

$$\phi_u = A_u p_u + m_u v_u \quad (\text{A3})$$

$$m_d = A_d \rho_d v_d \quad (\text{A4})$$

$$e_d = m_d \left\{ \frac{f+2}{2} p_{cd} \rho_d^{-1} + \frac{1}{2} v_d^2 \right\} \quad (\text{A5})$$

$$\phi_d = A_d p_{cd} + m_d v_d \quad (\text{A6})$$

で表される。保存則は、

$$\frac{dM_u}{dt} = m_u - m_d \quad (\text{A7})$$

$$\frac{dE_u}{dt} = e_u - e_d \quad (\text{A8})$$

$$\frac{d\Phi_u}{dt} = \phi_u - \phi_d - \phi_w \quad (\text{A9})$$

となる。(A9)で ϕ_w は壁面から圧力によって受ける力に相当し、気体の圧力の反作用としての力積であり、

$$\phi_w = \int_{A_d}^{A_u} p_u dA \quad (\text{A10})$$

と表される。これは、気体分子の壁面衝突によって生じる単位時間当たりの運動量変化に相当する。

保存量流量 $m_u, m_d, e_u, e_d, \phi_u, \phi_d, \phi_w$ の数 n_c は 7 あり、 $n_c = 7$ である。圧力、密度、流速を中間変数とすると、 $p_u, p_d, \rho_u, \rho_d, v_u, v_d$ の中間変数が定義でき、中間変数の数を n_γ とすると、 $n_\gamma = 6$ である。コントロールボリュームの容積を V とすると、保存量の定義の式は

$$M_u = \rho_u V \quad (\text{A11})$$

$$E_u = M_u \left\{ \frac{f}{2} p_u \rho_u^{-1} + \frac{1}{2} v_u^2 \right\} \quad (\text{A12})$$

$$\Phi_u = M_u v_u \quad (\text{A13})$$

となる。これらの式は第 4 章 4.22 節の(4.34)で示す拘束の式に含まれる。

p_d が徐々に下がると v_d は徐々に増大する。しかし、 v_d が音速に達すると、流体中で最も速い情報伝達速度は音速なので、 p_d がそれ以上に下がっても、その情報は上流には伝達されない。

したがって、流出部の圧力、密度、速度は音速に達した状態を保持することになる。そこで、

$$p_{cr} = \begin{cases} p_d & v_d^2 < \frac{f+2}{f} p_d \rho_d^{-1} \\ \frac{f}{f+2} \rho_d v_d^2 & v_d^2 \geq \frac{f+2}{f} p_d \rho_d^{-1} \end{cases} \quad (\text{A14})$$

とする。ただし、ここでは、集中定数系として壁面における圧力分布を無視して、簡単に

$$\phi_w = (A_u - A_d) p_u \quad (\text{A15})$$

とする。等エントロピー変化を仮定した場合は、特別な圧力分布を仮定しているとみなすことができる。(A14)を(A5)と(A6)に代入すれば、音速による律束条件を加味したことになる。

ここでは、準定常状態について考えることにして、(A7)、(A8)、(A9)の左辺を全て 0 とする。これは、3 つの拘束を与えたことに相当する。さらに、 p_u, ρ_u, p_d は既知と仮定したので、拘束の式の数 n_q とすると、準定常状態の仮定と既知の変数の条件によって、 $n_q = 3 + 3 = 6$ の拘束を与えたことになる。保存量流量の定義の式は(A1)～(A6)、および、(A15)で $n_f = 7$ を与えた。すると、第 4 章 4.42 節の(4.42)に示す HLMD の変数と式の数に対する整合条件は

$$13 = 7 + 6 = n_c + n_\gamma = n_f + n_q = 7 + 6 = 13 \quad (\text{A16})$$

となり、満たされていることが分かる。一般には、 p_u, ρ_u, p_d の組み合わせ以外でも 3 変数を既知とすれば、独立な 3 式を与えれば、HLMD は解けることになる。どの変数を既知とするかは、どの変数を計測するかに対応させることができる。圧力は比較的容易に計測でき、温度は熱電対のケーシングなどの伝熱

を慎重に考慮する必要があるが計測可能である。密度は理想気体の状態方程式を仮定し、ガス定数が分かっていると仮定すると、圧力と温度から計算可能である。したがって、 p_u, ρ_u, p_d を与えることは実用的に意味がある。もし、流量を与えるとすれば、 p_u, ρ_u, p_d のいずれか 1 つを計算で求める問題を設定することができる。

今、上流の管の断面積 A_u が徐々に大きくなる場合を考えると、 m_u を有限とすれば、 v_u は徐々に小さくなる。極限では $v_u \rightarrow 0$ である。このとき、(A7)~(A9)は、

$$m_d = A_d \rho_d v_d \quad (\text{A17})$$

$$\frac{f+2}{2} p_u \rho_u^{-1} = \frac{f+2}{2} p_{cd} \rho_d^{-1} + \frac{1}{2} v_d^2 \quad (\text{A18})$$

$$p_u = p_{cd} + \rho_d v_d^2 \quad (\text{A19})$$

となり、第 7 章 7.1.2 節で記述したように、(A17)、(A18)、(A19)は ρ_d, v_d, m_d について解析的に解くことができる。

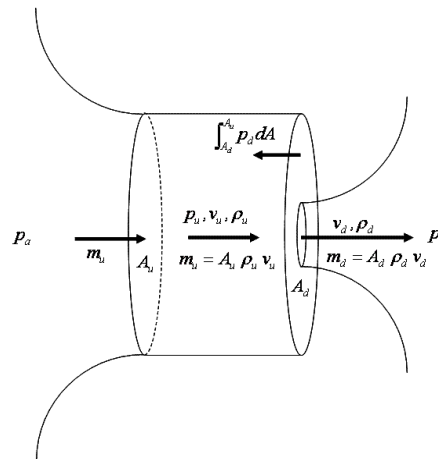


図 3 大気からの流入

大気からの気体の流入を考えるならば、図 3 のようになる。上流の圧力センサは断面積 A_u の管に取り付けられる。密度を直接測ることは難しいので、温度 T_u を測定し、理想気体の状態方程式を用いて、

$$\rho_u = \frac{p_u}{RT_u} \quad (\text{A20})$$

のように求める。ここで、 R は気体によって異なるガス定数である。

ここで扱う A_u が有限の値を取る状況では、 v_u は未知数になるが、 m_d と同時に v_u も求めるというモデルは既存の文献には見当たらなかった。圧力を一定とする大気からの流入の場合、 p_u は v_u の増大に伴って低下することになり、同様に T_u も低下する。しかし、ここでは、 p_u と T_u 、すなわち、 p_u と ρ_u を一定と仮定し、 v_u, ρ_d, v_d, m_d を求める。 p_u と T_u は計測可能なので、実際には圧力と温度を計測して、 p_u と ρ_u に変換すると理解して欲しい。 m_d を追加しているが、 m_d の計算には(17)を用いるので式と変数の数の整合条件は満たされている。

3. ホモトピー法

準定常状態を仮定した場合、(7)～(9)は、

$$F(X) = \begin{bmatrix} m_u - m_d \\ e_u - e_d \\ \phi_u - \phi_d - \phi_w \end{bmatrix} = 0, \quad X = \begin{bmatrix} v_u \\ \rho_d \\ v_d \end{bmatrix} \quad (21)$$

と表すことができる。(A21)は非線形代数方程式で、解析に解くことは難しい。そこで、(A21)を解く代わりに、

$$\frac{dF(X)}{dt} = -\lambda F(X), \quad \lambda > 0 \quad (A22)$$

を解く。(A22)の微分方程式の解は、 X の初期値を X_0 として、

$$F(X) = F(X_0) \exp(-\lambda t) \quad (A23)$$

なので、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $F(X) \rightarrow 0$ となる。収束速度は λ によって調整できる。したがって、(A22)をとくことで、実用的に $F(X) = 0$ を解くことができる。(A22)は

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} = -\lambda F(X) \quad (A24)$$

だから、

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda \left[\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right]^{-1} F(X) \quad (A25)$$

を数値計算で求めればよい。準定常状態を求める場合、常に(A25)式が現れるので、形式的に扱うことができる。 $F(X)$ が与えられたとき、 $\partial F(X)/\partial X$ の計算が必要だが、数式処理を用いれば簡単に求めることができる。

この方法は、解析解を求める必要がなく、保存則の式を直接使うのでフレキシビリティが高い。上流で温度 T_{wu} の管壁から気体への伝熱を考える場合は、エネルギー保存則(A8)を

$$\frac{dE_u}{dt} = e_u - e_d + e_{wu} \quad (A26)$$

に変え、例えば、

$$e_{wu} = C(T_u - T_{wu}) \quad (A27)$$

のように伝熱の式を加えればよい。この場合、保存量流量が1つ増え、保存量流量の式も1つ増えたので、整合条件は、やはり、満たされている。

4. 実装

以下の手順で Simulink に実装することができる。

ステップ 1 :

数式処理ツール(Maple、Mathmatica や MuPAD、など)に(1)~(6)、および、(15)を定義する。

ステップ 2 :

(21)を定義する。

ステップ 3 :

(21)に数式処理による代入を繰り返し、 $F(X)$ を求める。この際、(14)による計算の分岐が必要となる。

ステップ 4 :

数式処理ツールで $F(X)$ を X で偏微分し、この行列を A とする。

ステップ 5 :

$F(X)$ と A を Simulink の Embedded MATLAB Function にエクスポートし、

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda \left[\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right]^{-1} F(X)$$

を出力させる。この信号を Integrator で積分し、Scope で見る。同時に、 $F(X)$ も Scope で見て、収束状況を確認する。

ステップ 4 とステップ 5 はベクトル関数 $F(X)$ と $\partial F(X)/\partial X$ はモデルによって変わるが、手順自体はモデルに依存しないので、汎用的な方法である。したがって、ここでの提供されたファイルはテンプレートとして各種の問題に適用できる。

5. ファイルの説明

提供するファイルは下記の通りである。

- (1) basic_flow.mdl : Simulink 上で実装されたモデル
- (2) basic_flow.mn : 数式処理 MuPAD による保存流量の定義と $F(X)$ と $\partial F(X)/\partial X$ の計算
- (3) basic_flow.mw : 数式処理 Maple による保存流量の定義と $F(X)$ と $\partial F(X)/\partial X$ の計算
- (4) plot_basic_flow.m : basic_flow.mdl の実行結果をプロットする M ファイル

basic_flow.mdl を開くと図 4 のモデルが現れる。 p_d を除変しながら準定常状態を計算することを想定して、計算時間は 1000 秒間、Scope のサンプリング時間は 1 秒毎としている。Cal_dX/dt ブロックを開くと $F(X)$ と $\partial F(X)/\partial X$ の計算し、音速律束の扱いと dX/dt を求めている様子が分かる。 $F(X)$ を $F(3,1)$ のベクトルで表し、 $\partial F(X)/\partial X$ を $A(3,3)$ の行列で表している。Integrator の出力はベクトル $[v_u, \rho_d, v_d]^T$ であり、初期条件として $[1,1,100]^T$ を与えている。 $[1,1,1]^T$ でも $[1,1,500]^T$ でもよいが、 $[500,1,500]^T$ は妥当な値に収束しない。 $[0,1,0]^T$ では計算はできない。一般に、HLMD は多重解を持ち初期値依存なので、注意が必要である。Basic_flow.mdl を実行した後に plot_basic_flow.m を実行すると図 5 の実行結果の図を得る。

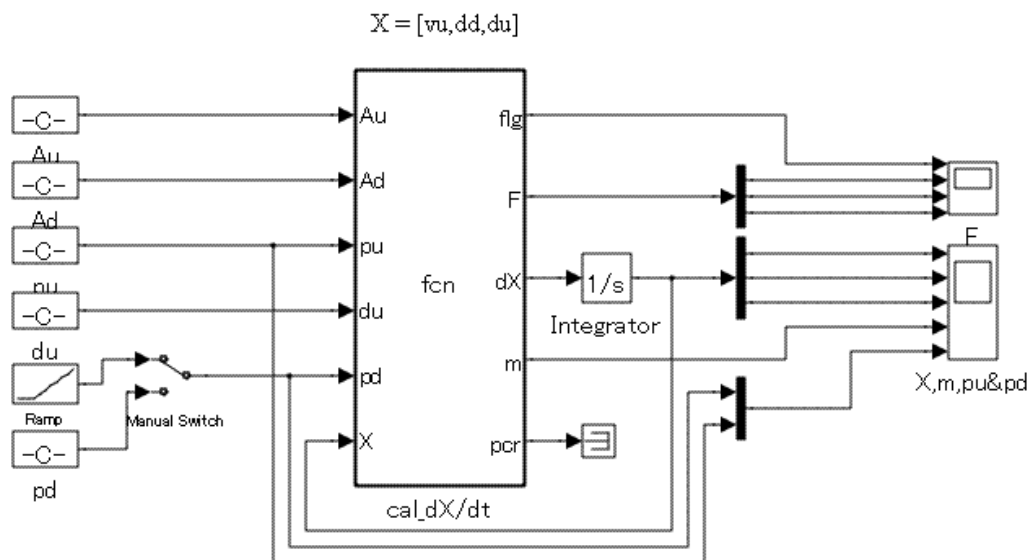


図 4 SIMULINK への実装例

図 4 で Manual Switch で下流圧力 p_d を一定値とするか、除変するか切り替えている。図 4 は除変する場合を示している。 flg は音速律束となっているかどうかを示すフラグであり、1 は音速律束でない場合、-1 は音速であることを示す。 F は $F(X)$ の値であり、 dX は dX/dt である。 m は流出流量であり、 p_{cr} は流出部の圧力である。

図 5 は実行結果を示している。下段の図は p_u と p_d であり、 p_d が下がると v_u と v_d は増大し、 ρ_d は小さくなる。約 700s で音速律束に達し、質量流量は一定になっている様子が分かる。

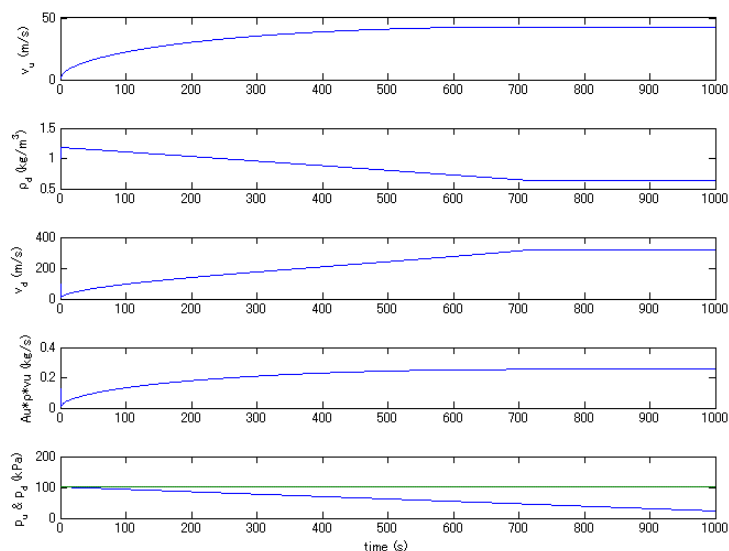


図 5 実行結果